ÜBER
ZIRKULARE UND ELLIPTISCHE POLARISATION VON SCHALLWELLEN.

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Herm. Schwarz
aus Berlin.

ACAD. LIBRARY BERL.

Rostock
H. Winterberg's Buchdruckerei
1903.

Referent: Herr Professor Dr. **L. Matthiessen.**

Meiner Mutter!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552723_0113

Da die Fortpflanzung einer Wellenbewegung von der molekularen Beschaffenheit der Medien abhängt, so leuchtet ein, dass jene auch wohl in Verbindung tritt mit verschiedenen anderen Fragen, die insbesondere dem Gebiete der Elastizitätslehre angehören, und deren Lösung somit auch auf akustischem Wege gelingen konnte. Es mussten diese Fragen deshalb weiter von Bedeutung sein, weil sie sich auch auf die charakteristischen Unterschiede und Ähnlichkeiten insbesondere zwischen Licht- und Schallerscheinungen erstreckten. Denn unzweifelhaft werden Erscheinungen, die wir der Optik entnehmen: die Reflexion, die Brechung, die Absorption, hier von analoger Bedeutung sein.

In gleicher Weise wie beim Licht die Interferenzerscheinungen einen Hauptgegenstand der Forschung gebildet haben, ist dies auch beim Schall der Fall. Wir begegnen hier einer ganzen Reihe von Tatsachen und bemerkenswerten Gesetzen, die zum Teil ohne weiteres aus der Lehre vom Licht auf die des Schalles übertragen werden können, zum Teil aber auch Verschiedenheiten erkennen lassen.

Wir gehen von der bekannten Erscheinung aus, dass eine tönende Stimmgabel, in gewisser Entfernung vor dem Ohr um ihre Längsachse gedreht, in verschiedenen Lagen eine Interferenz des Tones zeigt.

Die Geschichte dieser Erscheinung, die zugleich die Geschichte einer gewissen Klasse von Schallerscheinungen überhaupt ist, ist nicht ohne Interesse.

Der Erste, der auf sie aufmerksam gemacht hat, scheint Thomas Young zu sein, in der berühmten Arbeit, in welcher er auch die Entdeckung der Interferenz des Lichtes mitteilt: »Philosophical Transactions.« Read before the Royal Society. Nov. 12. 1801. Nämlich in der Erklärung des zweiten Grundsatzes:

> »And the different intensity of different parts of the same circular undulation may be observed by holding a commun tuning fork at arm's length, while sounding and turning it from a plane directed to the ear, into a position perpendicular to that plane.«

Dies ist das Einzige, was er darüber bemerkt. Eine mathematische Untersuchung wird nicht gegeben und überhaupt ist auch aus dem Zusammenhange eine klare Vorstellung von der Schallverbreitung, von der mehrmals die Rede ist, nicht zu entnehmen.

Bald darauf wurde dasselbe Phänomen von Vieth in Dessau wahrgenommen und mitgeteilt. Bei Versuchen über das Nachklingen angeschlagener Körper bemerkte er überall unter gewissen Verhältnissen das völlige Verschwinden des Tones.

Hällström hat diese Versuche weiter fortgesetzt. Er untersuchte vorzugsweise Scheiben und fand, dass das Verschwinden des Tones nur davon abhängt, ob die verlängerte Ebene der Scheibe die Öffnung des Ohres trifft, oder ob sie ausserhalb derselben das Ohr

schneidet. Er konstatiert nur das Gesetz der ungleichen Intensität der von einem tönenden Körper nach allen Richtungen ausgehenden Schallwellen, ohne dasselbe durch bestimmtere Anschauungen zu begründen.

Demnächst wurden auch die den Knotenlinien tönender Scheiben entsprechenden, also zur Schwingungsrichtung parallel liegenden, Interferenzflächen von Purkinje beobachtet, dieselbe Erscheinung, die W. Hopkins-Cambridge in seinen bekannten Versuchen objektiv dargestellt hat.* Nachdem Purkinje sich vergeblich bemüht hatte, in Dampf, Rauch oder Staub, die Schallwellen zu fixieren, war er im höchsten Grade überrascht, als er beim Vorbeistreichen des Ohres nahe über der Oberfläche einer klingenden Scheibe mehrere Intermissionen in verschiedenen Richtungen bemerkte. Als er diese in Bezug auf die Stellen der Scheibe unter einander kombinierte und mit den durch Sand dargestellten Klangfiguren verglich, fand er sie diesen vollkommen entsprechend. »Die Intermission«, meint er, »die Klangfigur, pflanzt sich also auf eine Strecke ringsherum in der Luft fort, bis sie durch die sich verbreitende Oscillation der Luft, wie der Kernschatten durch den Halbschatten, allmählich verwischt wird. Ebenso erscheint ringsherum am Rande die Intermission, weil die Scheibe nach dieser Richtung nicht oscilliert.« Eine genügende Erklärung der Erscheinungen hat er im übrigen nicht gegeben.

So scheinbar nahe aber der Schritt von den Hopkins'schen Klangscheiben zu den Luft- bezw.

*) S. »Poggend. Annalen.« Bd. 44 (1838) p. 246, 603.

Flüssigkeitsklangscheiben liegen mag, es wurde derselbe geraume Zeit nicht getan, weil man einerseits kein Mittel besass, die verschiedenen Schwingungsformen bei Luft und Flüssigkeiten hervorzurufen, andererseits keins, dieselben dem Auge sichtbar zu machen.

Zuerst Prof. Kundt und Dr. Vierth* zeigten nun, gestützt auf die älteren Faraday'schen Versuche,** wie bei Platten von elastischer Substanz, also bei »Luftplatten« oder »Luftklangscheiben«, die verschiedenen Schwingungsformen mit Leichtigkeit hervorgerufen und dem Auge durch Pulver sichtbar gemacht werden können; Versuche, die Kundt später auch auf Röhren experimentell ausgedehnt hat.

Nach ihm gelang es E. Villary-Florenz*** die Schallschwingungen direkt sichtbar zu machen. Er machte seine interessanten Versuche an einer grossen Flamme von Leuchtgas, da er ja mit einem sichtbaren Gase operieren musste. Er näherte derselben und zwar ihrer grössten Breite eine horizontale Stimmgabel, die in horizontaler Ebene lebhaft schwang, und beobachtete eine bedeutende Verstärkung ihres Tones, wenn sie kaum mit dem Gase in Berührung kam. Diese Verstärkung bewies, dass

---

*) Die Vierth'schen Beobachtungen (Stettiner Osterprogramm von 1870) wurden in demselben Jahre von Prof. Matthiessen ergänzt und teilweise berichtigt. Vergl. »Poggend. Ann.« Bd. 141 p. 375, 1870.

**) S. Philosoph. Transact. f. 1831, p. II. pag. 299.

***) Vergl. »Poggendorffs Ann.« Bd. 140 (1870) p. 588.

das Gas, dessen Zerfällung in abwechselnd helle und dunkle Wellen deutlich zu sehen und leicht bildlich festzuhalten war, offenbar Teil nahm an den Schwingungen der Stimmgabel.

In bemerkenswerter Weise gelang es neuerdings M. Weerth* die Fixierung von Schallwellen in Rauch anlässlich seiner Arbeit »Über Lamellentöne« zu veranschaulichen.

Die Gebrüder Weber** entdeckten schon früher bei ihren akustischen Untersuchungen gleichfalls die Interferenz des Tones einer Stimmgabel. Sie haben die Erscheinung sehr genau untersucht und zwar nicht nur die Lage der Richtungen, in denen der Ton verschwindet, sondern auch deren Abhängigkeit von der Breite und Dicke der Zinken.

Wie es scheint, sind die Gebrüder Weber durch theoretische Betrachtungen auf diese Versuche geführt worden, als in Widerspruch stehend mit einer Behauptung von Poisson, dass nämlich, wenn die ursprüngliche Erschütterung der Luft, nicht wie bei der Ausdehnung einer Kugel nach allen Richtungen stattfindet, sondern nur nach einer Richtung, die Bewegung sich nur in der Richtung dieser Schwingung bemerkbar fortpflanze. Die Betrachtung, dass bei einem Stabe immer zwei gleichzeitig von entgegengesetzten Seiten ausgehende sphärische Wellen mit entgegengesetzter Phase in ihrem Zusammenwirken auf die umgebenden

*) Vergl. M. Weerth, Inaug. Diss. Rostock 1902, insbesondere die Abbildungen auf Taf. I.

**) Siehe Weber's »Wellenlehre«. Leipzig 1825.

Luftschichten zu verfolgen sind, findet sich weder bei Poisson noch in den ersten Untersuchungen der beiden Weber klar und bestimmt ausgesprochen.

Nachdem nun durch die Weber'schen Versuche die Kenntnis der akustischen Interferenzerscheinungen wesentlich gefördert war, machte Chladni darauf aufmerksam, dass man das Interferenzphänomen deutlicher beobachten könne, indem man die angeschlagene Stimmgabel über einem mittönenden Glase klingen lasse. Versuche, die er 1826 mit Sömmring zusammen über die beim Eintauchen einer tönenden Stimmgabel in Wasser entstehenden Wellen anstellte, führten ihn jedoch auf eine irrige Vorstellung von der Verbreitung der Schallwellen in der Luft, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

Die diesen Versuchen folgenden eingehenden experimentellen Untersuchungen von W. Weber ergaben das Gesetz:

> dass alle Punkte, wo der von der Stimmgabel ausgehende Ton verschwindet, zusammengenommen hyperbolische, den Kanten der Gabel parallel laufende Zylinder bilden, (deren senkrechte Durchschnitte also Hyperbeln* sind, welche ihre Brennpunkte in den Kanten der Stimmgabel haben,) die noch am Ende der Zinken nach aussen hyperbolisch gekrümmt sind.

Die Begründung dieser Erscheinung auf theoretischem Wege im Zusammenhange mit der Behandlung der Schallwellen überhaupt soll im nachfolgenden gegeben werden.

*) Vergl. die schematische Darstellung auf Taf. I u. Taf. II, deren Erläuterung sich erübrigt. Taf. I zeigt den Verlauf dieser Kurven bei gleicher, Taf. II bei ungleicher Wellenlänge.

Fortpflanzung von Wellen längs einer Linie, auf einer Fläche und im Raume.

Jede längs einer **Linie** fortschreitende Welle repräsentiert eine gewisse Energie, welche die Teile vermöge ihrer Geschwindigkeit, vermöge ihrer Ablenkung aus der Gleichgewichtslage, besitzen. Dies gilt sowohl für transversale, wie für longitudinale Schwingungen. Ist dabei keine Reibung oder irgend ein anderer Widerstand zu überwinden, wodurch die Schwingungsenergie vermindert würde, so wird diese nach der Peripherie des Systems unvermindert übertragen. Dies gilt für die ganze Zeit, während welcher die Schwingung im Erregungspunkte durch einen schwingenden Körper unterhalten wird.

Bei der Fortpflanzung von Wellen auf einer **ebenen Fläche** verbreitet sich die Energie, welche jeder kreisförmigen Welle innewohnt, über fortwährend grösser werdende Kreise. Wird der Radius eines derartigen Kreises n mal so gross, und ist wiederum keine Reibung oder sonst irgend ein anderer Widerstand vorhanden, wodurch der Welle ein Teil der Energie entzogen wird, so wird auf den betr. Wellenkreis noch die unveränderte ursprüngliche Energie entfallen. Da aber nun auch der Umfang des Wellenkreises n mal so gross

geworden ist, so wird jeder Längeneinheit dieses Umfanges nur noch der n te Teil der Anfangsenergie zukommen, welche ursprünglich auf die Längeneinheit entfiel. Die Stärke, die Intensität, der Wellenbewegung, d. h. die auf die Längeneinheit des Kreises entfallende Energie, wird daher dem Abstande vom Ausgangspunkte der Wellenbewegung umgekehrt proportional sein.

Breitet sich die Wellenbewegung nach allen Richtungen hin gleichmässig über **Kugeloberflächen** aus, so wird die Energie, die einer solchen Oberfläche innewohnt, falls sie nicht durch irgend welchen Widerstand vermindert wird, bei Vergrösserung der Oberfläche wiederum unverändert bleiben. Wird nun in diesem Falle der Abstand eines Punktes der fortschreitenden Welle vom Erregungszentrum n mal so gross, so wird die Kugeloberfläche n^2 mal so gross. Daher wird auch die auf jede Flächeneinheit dieser letzteren Kugel entfallende Energie der n^2 te Teil von derjenigen sein, die einem ebenso grossen Flächenstück der ursprünglichen Oberfläche zukam. Die Intensität der Wellenbewegung, gemessen durch die auf die Oberflächeneinheit entfallende Energie, ist daher hier umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes vom Erregungszentrum.

Verstärkung und Schwächung von Schwingungen durch Interferenz fortschreitender Wellen.

Betrachten wir zwei Systeme fortschreitender Wellen, die in den Punkten C und C' * erregt worden sind und die sich mit gleicher Geschwindigkeit ausbreiten; nehmen wir ferner an, dass sowohl die Perioden als auch die Phasen beider Punkte einander gleich sind.

Um nun den Schwingungszustand eines Punktes zu ermitteln, der unter der Einwirkung beider Schwingungsquellen steht, beachten wir, dass sich jedes der beiden Wellensysteme über das andere hinweg oder durch das andere hindurch ausbreitet, gerade so, als ob dieses letztere nicht vorhanden wäre. Bei der Ausbreitung von Wellenkreisen auf der Wasseroberfläche tritt dies besonders deutlich hervor: Die Wellen durchkreuzen einander ungestört; jedes System breitet sich über das andere hinweg aus wie über einen ebenen Wasserspiegel.

Betrachten wir zunächst transversale Schwingungen, und zwar den einfachen Fall, wo die Schwingungsrichtungen auf der Ebene senkrecht stehen, auf welcher sich die Wellen ausbreiten und welche die beiden Wellenzentren C und C' enthält.

*) Vergl. Tafel III.

In einem Punkte P, welcher so liegt, dass der Unterschied seiner Abstände CP und $C'P$ von den Erregungszentren eine gerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt, befinden sich die beiden dort zusammentreffenden Schwingungen in derselben Phase; denn jedesmal nach der vollen Schwingungsdauer T wird die Phase wieder dieselbe, und in dieser Zeit hat sich die Wellenbewegung um eine ganze Wellenlänge weiter ausgebreitet. Beide Schwingungen sind also in dem Punkte P algebraisch zusammenzusetzen und haben, wie später nachgewiesen werden wird, in diesem Falle eine Gesamtdeviation:

$$Y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + 1 \right)$$

Die Schwingungen werden hier in ihrer Wirkung einander verstärken.

In einem Punkte Q, dessen Abstände CQ und $C'Q$ von den Erregungspunkten um eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen differieren, sind die Phasen der beiden dort ankommenden Schwingungen fortwährend einander entgegengesetzt; denn der Unterschied der beiden Abstände beträgt in dem betrachteten Punkte eine ganze Anzahl Wellenlängen, vermehrt um eine halbe Wellenlänge, und dieser halben Welle entspricht eine Phasendifferenz von $^1/_2 T$. Für die Schwingung dieses Punktes gilt daher die Gesamtdeviation:

$$Y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + {}^1/_2 \right)$$

Die Schwingungen wirken sich hier fortwährend entgegen; und wenn die beiden Amplituden beim Eintreffen in Q einander gleich sind, so heben sich die Schwingungen hier auf; der Punkt Q bleibt dann fortwährend in Ruhe.

Diese Interferenz zweier Systeme fortschreitender Wellen ist auf Taf. III gezeigt. Sie möge den Durchschnitt der bei der Ausbreitung longitudinaler Wellen sich bildenden Kugeloberflächen mit einer durch C und C' gehenden Ebene darstellen. C und C' sind die Erregungspunkte der Schwingungen. Die stark ausgezogenen schwarzen Kreise stellen in dem betr. Augenblick beispielsweise Wellenberge bezw. die Stellen grösster Verdichtung, die feiner ausgezogenen konzentrischen Kreise Wellentäler bezw. Stellen grösster Verdünnung dar. P liegt dann in einer doppelten Luftverdünnung; nach $^1/_2 T$ werden hier zwei Verdichtungen zusammentreffen. Die Bewegung wird hier fortwährend verstärkt, und der Unterschied der Entfernungen von C und C' beträgt hier 7 halbe Wellen. Ebenso wird die Bewegung im Punkte P' durch das Zusammenwirken der beiden Schwingungen verstärkt. In dem Punkte Q, für welchen die Differenz der Entfernungen von C und C' eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen [$^1/_2 \lambda$] beträgt, wirken die Schwingungen einander fortwährend entgegen. In der auf der Tafel gegebenen Lage befindet sich Q inmitten einer Verdichtung der sich von C' ausbreitenden Welle und zugleich inmitten einer Verdünnung, welche C als Wellenzentrum besitzt; nach $^1/_2 T$ ist es gerade umgekehrt, so dass die

Schwingungszustände daselbst wiederum einander entgegengesetzt sind. Die Punkte, deren Abstände von C und C' einander gleich sind, und in denen also die Schwingung verstärkt wird, liegen auf der Geraden MM', der Medianen, welche senkrecht auf CC' steht und durch den Mittelpunkt von CC' hindurchgeht.

Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, für welche die Differenz der Abstände von C und C' konstant ist, liegt auf Hyperbeln, deren Achse die Verbindungslinie von C und C' ist. So ist z. B. die durch B,P'. . . . . gehende Linie eine Hyperbel, für welche der Unterschied der radii vectores 2 Wellenlängen beträgt. Auf diesen Linien zeigt sich der stärkste Wechsel in der Dichtigkeit. Auf den Hyperbeln AA', für deren Punkte der Unterschied der beiden Leitstrahlen $2^1/_2$ Wellenlängen beträgt, erfährt die Dichtigkeit die geringste Änderung.

Befinden sich beide Schwingungszentren in derselben Phase, so beträgt für die Punkte, in denen die periodische Änderung der Dichtigkeit am grössten ist, der Unterschied der beiden Abstände von C und C' eine gerade Anzahl halber Wellenlängen.

Für die Punkte, in denen der Wechsel in der Dichtigkeit am geringsten ist, beträgt der Unterschied der Abstände von C und C' eine ungerade Anzahl halber Wellen.

Die oben besprochenen Kurven der Taf. III beschreiben bei der Rotation um die Gerade CC' eine Schar von Hyperboloiden, auf denen die Dichtigkeit die grösste bezw. kleinste periodische Änderung erfährt.

Die Interferenzkurven zweier hydrodynamischer Wellensysteme* hat zuerst Prof. Matthiessen** mit Hülfe einer Stimmgabel experimentell veranschaulicht, an deren Schenkelenden passende Querstücke mit Spitzen befestigt waren. Bei der Schwingung liess er diese spitzen Stifte ein wenig in eine Quecksilberoberfläche eintauchen, so dass sie die Wellenzentren bildeten.

---

*) Vergl. Weber's »Wellenlehre«.

**) Vergl. Ann. d. Phys. u. Chem.: »Über die Wanderung der Interferenzkurven zweier mikroskopischer Kreiswellensysteme auf der Oberflächenhaut von Flüssigkeiten«. [N.F. Bd. 32. 1887. p. 16].

Zusammensetzung von longitudinalen Schwingungen verschiedener Richtungen.

Periodische Bewegungen können ebenso wie andere zusammengesetzt werden. Besitzt z. B. ein Punkt eine Schwingungsbewegung in einer Ebene, die sich parallel zu sich selbst harmonisch bewegt, so werden beide Bewegungen, wie in der Mechanik, nach dem Parallelogrammprinzip zusammengesetzt. In derselben Weise lässt sich die Schwingung bestimmen, in welche ein Punkt unter der Einwirkung zweier Kräfte versetzt wird. Voraussetzung ist dabei jedoch, dass die Kraft, welche die eine Schwingung verursacht, nicht durch die andere Schwingung beeinflusst wird, wie dies in der Regel bis zu einem gewissen Gerade bei den akustischen Erscheinungen der Fall ist.

Die Zusammensetzung solcher Schwingungen ist von ganz besonderer Wichtigkeit, wenn die Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen.

Betrachten wir den allgemeinen Fall, wo die Schwingungszeiten der beiden senkrecht zu einander stehenden longitudinalen Schwingungsbewegungen einander gleich, die Amplituden ungleich sind.

Um zunächst die Bahn des Punktes zu konstruieren, nimmt man auf den Schenkeln eines rechten

Winkels bei O (Fig. 1) zwei Punkte M und N an, und beschreibt um dieselben als Mittelpunkte Kreise mit den Radien a_1 und a_2, die gleich der halben Amplitude beider Schwingungsbewegungen sind. Die Projektion eines den Kreis M gleichförmig umlaufenden Punktes auf eine zu ON parallele Richtung giebt die Ablenkung in dieser Richtung an, die Projektion eines den Kreis N gleichförmig umlaufenden Punktes auf eine zu OM parallele Richtung bestimmt die Ablenkung in dieser zweiten Richtung. Die Schnittpunkte der aus den zugeordneten Punkten beider Kreise gefällten Senkrechten bilden in ihrer Gesamtheit die resultierende Schwingung.

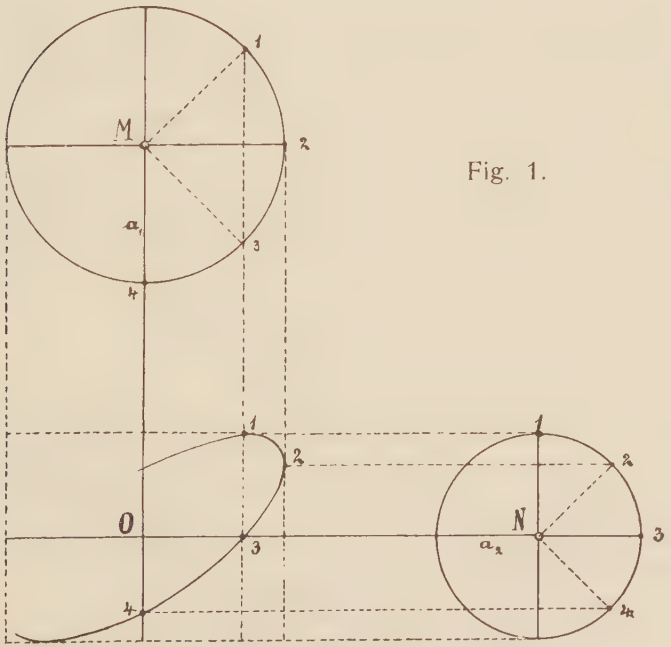


Fig. 1.

In der obigen Figur ist angenommen, dass beide Bewegungen den Phasenunterschied $^1/_8 T$ besitzen. Befindet sich bei der Kreisbewegung um N, welche hier die vertikale Ablenkung bestimmt, der Punkt auf dem Kreisumfange in 1, ist also die vertikale Ablenkung gleich a_2, so befindet sich der entsprechende Punkt auf dem Kreise M ebenfalls in der Lage 1, welche auf diesem Kreise der Bewegung auf N um den Betrag $^1/_8 T$ voraus ist. In der Figur, deren Konstruktion ohne weiteres klar ist, deuten gleiche Ziffern auf gleichzeitige Punktstellungen hin. Die Bahn des Punktes ist im allgemeinen eine **Ellipse,** [wie nachstehend nachgewiesen wird], die den Schnittpunkt O beider Hauptrichtungen zum Mittelpunkt hat. Bei dem Phasenunterschiede 0 bezw. $^1/_2 T$ degeneriert die Bahn zu einer geraden Linie.

Bezeichnen wir, zur Berechnung der Bahn, durch y die Ablenkung nach der Richtung ON, durch z die Ablenkung nach der Richtung OM, die beiden halben Amplituden durch a_1 und a_2, so ist, unter der Voraussetzung gleich grosser Schwingungsdauer:

$$y = a_1 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right) \text{ und}$$

$$z = a_2 \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo d den Phasenunterschied beider Bewegungen bedeutet und der Quotient $\frac{t}{T}$ die Zahl der vollständigen Oscillationen ausdrückt, welche seit dem Anfang der Bewegung verflossen sind.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{y}{a_1} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

Aus der zweiten resultiert:

$$\cos 2\pi \frac{t}{T} = \sqrt{1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T}} = \sqrt{1 - \left(\frac{z}{a_2}\right)^2}$$

$$\frac{y}{a_1} = \frac{z}{a_2} \cdot \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} - \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{a_2}\right)^2}$$

oder

$$\frac{y}{a_1} - \frac{z}{a_2} \cdot \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = -\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{a_2}\right)^2}$$

Diese Gleichung quadriert, ergiebt:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 \cdot \cos^2 2\pi \frac{d}{\lambda} - 2 \frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2} \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda} - \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

woraus folgt:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2} \cdot \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

Dies ist die Gleichung einer einem Rechteck von den Seiten $2\,a_1$ und $2\,a_2$ einbeschriebenen **Ellipse.**

Für

$$2\pi \frac{d}{\lambda} = 0 \text{ oder } 2\pi \frac{d}{\lambda} = \pi,$$

erhält man:

$$\frac{y}{a_1} = \pm \frac{z}{a_2};$$

die Bahn ist also bei dem Phasenunterschied 0 oder $^1/_2\,\lambda$ eine **gerade Linie**.

Für den Phasenunterschied $^1/_4\,\lambda$, d. h. für $2\pi \cdot \frac{d}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$ folgt:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 = 1.$$

Die Achsen der Ellipse liegen also in diesem Falle nach beiden Hauptrichtungen. Ist nun ausserdem

$a_1 = a_2$, so erhält man in der Gleichung:

$$y^2 + z^2 = a^2$$

zirkulare Schwingungen.

Diese Fälle sind zum Teil in der nachstehenden Figur 2 dargestellt; unter jeder Abbildung ist der Phasenunterschied verzeichnet.

Fig. 2.

0 $^1/_8$T $^2/_8$T $^3/_8$T $^4/_8$T.

Mathematische Darstellung der fortschreitenden Wellen.

Wir müssen, um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Molekülreihe vollständig darzustellen, für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punktes der Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Grösse und Richtung nach bestimmen können. Wir werden demnach eine Gleichung aufsuchen, welche uns die zu bestimmenden Grössen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage in der Molekülreihe wiedergiebt, denn der Bewegungszustand eines solchen Punktes hängt ja sowohl von der Zeit, als auch von der Lage des Punktes in der Reihe ab. Für einen gegebenen Zeitmoment ist die Bewegung der Punkte der Molekülreihe je nach ihrer Lage verschieden, und für eine gegebene Lage ist sie eine andere zu verschiedenen Zeiten. [Augenblicksbilder].

Um zu der Gleichung zu gelangen, betrachten wir einen beliebigen schwingenden Punkt der Reihe, dessen Entfernung von der Gleichgewichtslage gleich y sei. Rechnet man die Zeit von dem Augenblicke ab, wo dieser Punkt seine Gleichgewichtslage verlässt, so gilt für diesen Punkt nach t Sekunden:

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wo a die Amplitude und T die Zeitdauer einer ganzen Schwingung ist. Da nun:

$$a = 2 r \pi$$

die ganze Bahn im Zeitkreis ist, so kann man substituieren:

$$y = \frac{v_1 T}{2 \pi} \sin 2 \pi \frac{t}{T}.$$

v ist die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes in seiner Bahn.

$$v = \frac{d y}{d t} = v_1 . \cos 2 \pi \frac{t}{T} = a \frac{2 \pi}{T} . \cos 2 \pi \frac{t}{T} .$$

Die Tangentialgeschwindigkeit im Zeitkreise ist:

$$\tau = \frac{d v}{d t} = - \frac{4 \pi^2}{T^2} . y .$$

Wir nahmen an, dass an irgend einer Stelle in einer Molekülreihe ein Punkt zu schwingen anfängt. Dieser Schwingungszustand pflanzt sich fort und wir wollen zur Vereinfachung der Betrachtungen voraussetzen, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (c) und die Amplitude (a) konstant sei.

Wir wollen nun den Schwingungszustand von einem anderen, in der Fortpflanzungsrichtung gelegenen, Punkt untersuchen, welcher ursprünglich die Entfernung x vom früheren Punkt hatte. t_1 sei die Zeit, nach der der entfernte Punkt seine Schwingungen beginnt. Dann ist:

$$t_1 = t - \tau .$$

t und τ sind die Zeiten, während derer beide Punkte bereits in Schwingung begriffen sind. t und τ sind zwar variable Zeiten, aber ihre Differenz bleibt gleichmässig.

Für den zweiten Punkt ist der Abstand von der Ruhelage, die Deviation, durch die Zeit τ auszudrücken. Dann ist für den entfernten Punkt, das entfernte Molekül:

$$y_1 = a \,.\, sin\ 2\pi \frac{\tau}{T} = a \,.\, sin\ 2\pi \frac{t - t_1}{T}$$

Der erste Punkt hat schon während der Zeit t seine Schwingungen gemacht. Wir setzen dies in Beziehung zu x, der Entfernung des Punktes, denn wir wollen die Wellengleichung aufstellen. x — die ganze Entfernung — ist:

$$x = c\,t_1, \text{ mithin: } t_1 = \frac{x}{c} = x\,\frac{T}{\lambda}.$$

Daraus erhält man die Wellengleichung:

$$y_1 = a \,.\, sin\ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Wenn wir annehmen, dass t schon eine ganze Anzahl von Schwingungen gemacht hat, wird der Ausdruck noch etwas einfacher:

$$t = n\,\frac{T}{2};$$

das eingesetzt, ergiebt die Gleichung einer »Sinoide«:

$$y = a \,.\, sin\ 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

Die dem Zeitunterschiede $\frac{x}{c}$ entsprechende Phasendifferenz beider Punkte ist gleich $\frac{x}{cT} = \frac{x}{\lambda}$.

In der ganzen schwingenden Punktreihe wird jeder Punkt durch einen bestimmten Wert von x bestimmt; und nach einer bestimmten Zeit t nehmen die verschie-

denen Punkte der Reihe im allgemeinen verschiedene Lagen ein. In dem bestimmten Augenblicke werden diejenigen Punkte die grösste positive Ablenkung besitzen, für welche:

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = +1$$

ist; dies ist aber der Fall für:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi,$$

wo *n* eine ganze Zahl oder Null sein kann. Für diese Punkte gilt daher:

$$2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2} \mp 2n.\pi = \frac{2\pi}{\lambda}.x, \text{ oder:}$$

(1.)
$$x = ct - \frac{\lambda}{4} \mp n\lambda.$$

Die grössten negativen Ablenkungen kommen vor, wo:

$$\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -1$$

ist, und dieses tritt ein für:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{\pi}{2} \mp 2n\pi,$$

d. h. in Punkten, welche bestimmt sind durch:

(2.)
$$x = ct + \frac{\lambda}{4} \pm n\lambda.$$

Die Stellen der grössten positiven Ablenkung folgen auf einander in Abständen von ganzen Wellenlängen, was aus dem Auftreten des Gliedes $n\lambda$ in Gleichung (1) ohne weiteres erhellt. Dasselbe gilt für die Stellen, wo die negativen Ablenkungen am grössten sind.

Der Zeichenunterschied des Gliedes $\frac{\lambda}{4}$ in beiden Gleichungen (1) und (2) deutet an, dass der Abstand zweier aufeinander folgenden Moleküle, wo die Ablenkungen in entgegengesetztem Sinne ihre grössten Werte erreichen, gleich $2 \times \frac{\lambda}{4}$, d. h. gleich einer halben Wellenlänge ist.

Mathematische Darstellung der stehenden longitudinalen Wellen.

Stehende Wellen bilden sich in unserm Falle nur auf der Hauptachse, zwischen den beiden Erregungszentren *C* und *C'*. Überschreiten die von *C* ausgehenden Schwingungen *C'*, bezw. die von *C'* ausgehenden *C*, so haben wir es wieder mit fortschreitenden Wellen, deren Darstellung vorstehend gegeben, zu tun.

Nehmen wir an, dass die von den Zentren *C* und *C'*, deren gegenseitiger Abstand gleich d sei, ausgehenden Wellenzüge sich mit gleicher und entgegengesetzter Geschwindigkeit durchkreuzen und dass sie sich in derselben Phase befinden. Ein zwischen diesen beiden Punkten im Abstande x von dem einen Erregungspunkte (*C*) gelegener Punkt *N* wird t Sekunden nach Beginn der Schwingung, zufolge der von *C* ausgehenden Bewegung die Ablenkung haben:

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Derselbe Punkt liegt in dem Abstande d—x von der anderen Schwingungsquelle (*C'*), so dass er nach t Sekunden durch die von C' ausgehende Schwingungsbewegung die Ablenkung:

$$y_2 = a \,.\, sin\ 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d-x}{\lambda}\right)$$

erhalten haben wird.

Die resultierende Ablenkung (Y) wird daher die Summe von y_1 und y_2 sein. Also:

$$Y = a \,.\, sin\ 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a \,.\, sin\ 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d-x}{\lambda}\right),$$

woraus nach einigen Umformungen sich ergiebt:

$$Y = 2\,a \,.\, cos\ 2\,\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{d}{2\,\lambda}\right) . sin\ 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\,\lambda}\right)$$

Dies ist die Gleichung einer Welle, bei der die halbe Amplitude den Wert:

$$2\,a \,.\, cos\ 2\,\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{d}{2\,\lambda}\right)$$

hat. Diese hängt also von dem Orte (x) des betrachteten Punktes ab. In dem anderen Faktor, nämlich in:

$$sin\ 2\,\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\,\lambda}\right)$$

kommt als veränderliche Grösse nur die Zeit t vor. Ist dieser Faktor in einem gewissen Moment 0 geworden, so ist auch $Y=0$, und zwar für jeden beliebigen Wert von x; d. h. alle Punkte des Wellenzuges befinden sich alsdann in der Gleichgewichtslage, was auf eine **stehende** Schwingung hindeutet.

Die Amplitude ist am grössten für diejenigen Punkte, für welche $\cos\ 2\,\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{d}{2\lambda}\right)$ ein Maximum, also ± 1, ist. Daher gilt:

$$2\,\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{d}{2\,\lambda}\right) = n\,\pi$$

Hieraus folgt:

$$x = \left(n + \frac{d}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{2} = \frac{d}{2} + n\,\frac{\lambda}{2} \tag{3.}$$

Nehmen wir $n = 0$, so wird $x = {}^1/_2\, d$; es ergiebt sich demnach, dass in der Mitte zwischen beiden Wellenzentren ein Punkt liegt, wo die Amplitude ein Maximum ist.

Setzt man für n nacheinander 1, 2, 3 u. s. w., so zeigt sich, dass die Stellen grösster Amplitude, d. h. die Schwingungsbäuche, in Abständen von ${}^1/_2\lambda$ auf einander folgen. Der grösste Wert der Amplitude beträgt 2 a.

Die Stellen der Schwingungsknoten, wo die Amplitude 0 ist, ergeben sich aus:

$$\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{d}{2\lambda}\right) = 0,$$

wenn also:

$$2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{d}{2\lambda}\right) = \frac{2n+1}{2}\pi$$

wird, wo n eine ganze Zahl oder 0 sein kann. Die Knoten liegen daher vom Erregungspunkt C der Wellenbewegung in Abständen von:

$$x = \frac{d}{2} + (2n+1)\,\frac{\lambda}{4};$$

sie folgen daher ebenfalls aufeinander in Abständen von halben Wellenlängen und liegen mitten zwischen den Schwingungsbäuchen.

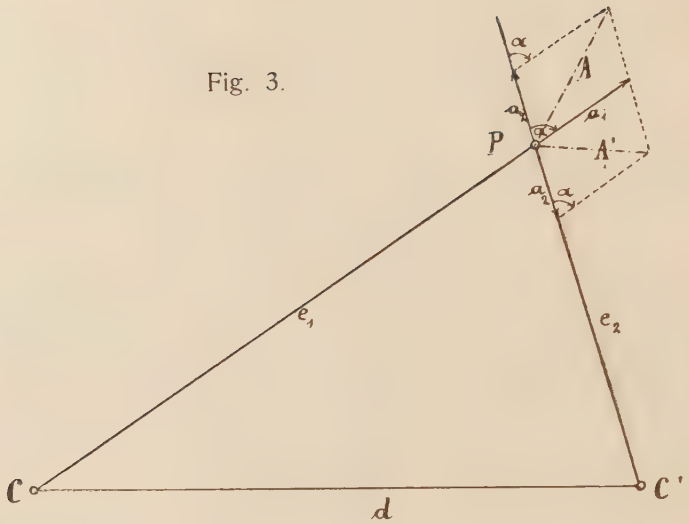
Durchkreuzung zweier Systeme von konzentrischen Longitudinalwellen.

Wir betrachten nunmehr Kombinationen von Longitudinalwellen, welche von den beiden Erregungszentren C und C' ausgehen. c ist hier konstant, da es sich um Schallwellen in isotropen Medien handelt. Wir wollen zugleich Töne von gleicher Höhe, also $\lambda_1 = \lambda$, $T_1 = T$ oder $N_1 = N$ voraussetzen, wie sie etwa von einer tönenden quadratischen Platte mit dem schrägen Kreuze ausgehen. In diesem Falle sind auch die Amplituden a_1 und a_2 gleich. Wiewohl in Wirklichkeit die Intensität des Schalles, wie wir gesehen haben, mit den Abständen von den Erregungszentren abnimmt, so wollen wir doch zur Vereinfachung der Betrachtungen annehmen, dass $a_2 = a_1$ konstant sei.

Die Bahnen sämtlicher Moleküle werden geschlossene ebene Kurven sein, welche in der Polarebene CPC' [S. d. nachf. Fig. 3] liegen.

Die Bahnen werden nach dem Prinzip des Parallelogramms der Kräfte bestimmt durch die Komponenten, indem wir zunächst allgemeiner $a_1 \gtrless a_2$ voraussetzen und zwar in schiefwinkligen Koordinaten:

Fig. 3.



(4.) $$y = a_1 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda}\right)$$

(5.) $$z = a_2 \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_2}{\lambda}\right)$$

Die Bahn eines Moleküls erhält man nun durch Elimination von t, d. h. indem man die Gleichungen von der Zeit t unabhängig macht.

Aus der Gleichung (4.) folgt:

$$\text{arc sin}\,\frac{y}{a_1} = 2\pi\,\frac{t}{T} - 2\pi\,\frac{e_1}{\lambda} \text{ oder}$$

$$2\pi\frac{t}{T} = \text{arc sin}\,\frac{y}{a_1} + 2\pi\,\frac{e_1}{\lambda}$$

Analog findet sich aus Gleichung (5.):

$$2\,\pi\,\frac{t}{T} = arc\,sin\,\frac{z}{a_2} + 2\,\pi\,\frac{e_2}{\lambda}.$$

Mithin ist:

$$arc\,sin\,\frac{y}{a_1} + 2\,\pi\,\frac{e_1}{\lambda} = arc\,sin\,\frac{z}{a_2} + 2\,\pi\,\frac{e_2}{\lambda}.$$

Dann ist die Phasendifferenz:

(6.) $$arc\,sin\,\frac{y}{a_1} - arc\,sin\,\frac{z}{a_2} = \frac{2\,\pi}{\lambda}\,(e_2 - e_1),\ \text{somit}$$

$$sin\left[arc\,sin\,\frac{y}{a_1} - arc\,sin\,\frac{z}{a_2}\right] = sin\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,[e_2 - e_1]$$

$$sin\,arc\,sin\,\frac{y}{a_1}\,.\,cos\,arc\,sin\,\frac{z}{a_2} - cos\,arc\,sin\,\frac{y}{a_1}\,.\,sin\,arc\,sin\,\frac{z}{a_2}$$

$$= sin\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(e_2 - e_1)$$

Man substituiert nunmehr für die arc - Funktion die betr. Werte, so wird die Bahngleichung algebraïsch, nämlich:

$$\frac{y}{a_1}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{a_2}\right)^2} - \frac{z}{a_2}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{a_1}\right)^2} = sin\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(e_2 - e_1).$$

Nach Umformung ergiebt sich:

(7.) $$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{a_1}\,.\,\frac{z}{a_2}\right)^2 - 2\,\frac{y}{a_1}\,.\,\frac{z}{a_2}\sqrt{\left[1 - \left(\frac{y}{a_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{z}{a_2}\right)^2\right]} =$$

$$= sin^2\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(e_2 - e_1)$$

Wenn man ferner von der obigen Gleichung (6.) die *cos* - Funktion nimmt, erhält man ebenso:

$$cos\left[arc\,sin\,\frac{y}{a_1} - arc\,sin\,\frac{z}{a_2}\right] = cos\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,[e_2 - e_1],$$

oder, wie oben:

$$\cos \text{arc sin} \frac{y}{a_1} \cdot \cos \text{arc sin} \frac{z}{a_2} + \sin \text{arc sin} \frac{y}{a_1} \cdot \sin \text{arc sin} \frac{z}{a_2} = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (e_2 - e_1);$$

nach Substituierung erhält man:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{a_1}\right)^2} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{z}{a_2}\right)^2} + \frac{y}{a_1} \cdot \frac{z}{a_2} = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (e_2 - e_1)$$

Diese Gleichung mit $2\frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2}$ multipliziert, ergiebt:

$$(8.) \quad 2\frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{\left[1-\left(\frac{y}{a_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{z}{a_2}\right)^2\right]} + 2\left(\frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2} \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (e_2 - e_1).$$

Gleichung (7.) zu (8.) addiert, giebt:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 - 2\frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2} \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (e_2 - e_1) = \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (e_2 - e_1),$$

oder

$$(9.) \quad \underline{\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 - 2\frac{y \cdot z}{a_1 \cdot a_2} \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} (e_1 - e_2) = \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (e_1 - e_2).}$$

Dieses ist die allgemeine Gleichung der Bahn der Moleküle, bei schiefwinkligen Koordinaten, und zwar sind es Ellipsen, deren Gestalt und Exzentrizität von dem Gangunterschiede und dem Neigungswinkel α der Komponenten oder Strahlenkoordinaten y und z abhängig ist. Je nach dem Werte von $[e_1 - e_2]$ sind dieselben bald linear [transversal oder longitudinal], bald elliptisch oder zirkular, bald rechts-, bald linksläufig,

jedoch so, dass jedes individuelle Molekül stets dieselbe Bahn durchläuft. — [Vergl. Taf. III.]

Auf dieser Tafel ist die Distanz der Zentren *CC'* gleich $3^1{}_2\,\lambda$ gewählt und *MM'* die Nebenachse oder Mediane der Zentrale. Es ist ferner, wie die Form der Komponentengleichungen zeigt, angenommen, dass die Schwingungen in *C* und *C'* gleichzeitig und gleichsinnig erfolgen, und dass die Zeit t von der Ruhelage an gerechnet wird.

Wir untersuchen nunmehr folgende **speziellen** Fälle:

I. Unter vorläufiger Beibehaltung der Ungleichheit von a_1 und a_2 setzen wir zunächst voraus, es sei irgendwo die Phasendifferenz — für n gerade oder ungerade — $n\pi$, d. h.:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(e_1 - e_2) = n\,\pi, \text{ demnach:}$$

$$e_1 - e_2 = \frac{n}{2}\,.\,\lambda, \text{ mithin wird aus:}$$

$$\sin\frac{2\pi}{\lambda}(e_1 - e_2) = \sin\frac{2\pi\,.\,n\,.\,\lambda}{2\lambda} = \sin n\,\pi = 0, \text{ und}$$

$$\cos\frac{2\pi}{\lambda}(e_1 - e_2) = \cos n\,\pi = \pm 1.$$

Setzt man diese Werte in Gleichung (9.) ein, so wird daraus:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 \mp 2\,.\,\frac{y\,.\,z}{a_1\,.\,a_2} = 0$$

oder

$$y = \pm\frac{a_1}{a_2}\,.\,z \text{ [Gleichung einer Geraden]}$$

Nimmt man nun n **gerade** $(= 2\,m)$ an, also:

$$e_1 - e_2 = m\,\lambda,$$

so führt der Neigungswinkel α der schiefwinkligen Strahlenkoordinaten y und z zu den folgenden Beziehungen: [Fig. 3.]

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, \cos\alpha}\,;$$

und nimmt man n **ungerade** $(= 2\,r + 1)$ an, also:

$$e_1 - e_2 = \frac{2\,r + 1}{2}\,\lambda, \text{ dann ist:}$$

$$A' = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, \cos\alpha}\,.$$

Aus diesen Werten wird, wenn man $a_2 = a_1$ setzt:

$$\underline{A = \sqrt{2\, a_1^2 + 2\, a_1^2 \,.\, \cos\alpha} = 2 \,.\, a_1 \,.\, \cos {}^1\!/_2\,\alpha\,;}$$

$$\underline{A' = \sqrt{2\, a_1^2 - 2\, a_1^2 \,.\, \cos\alpha} = 2 \,.\, a_1 \,.\, \sin {}^1\!/_2\,\alpha\,.}$$

Die erste Schwingung ist **longitudinal** [in MM', BB', CC', ...], die zweite **transversal** [in AA', ...] und da $e_1 - e_2 = \frac{n}{2}\lambda$, so liegen diese Wellen, welche — da die Funktion t und x enthält — **fortschreitend** sind, auf Hyperbeln, und deren Brennpunkte in C und C'.

II. Die Phasendifferenz sei:

$$2\,\pi\,\frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \frac{2\,n \pm 1}{2}\,\pi, \text{ also}$$

$$e_1 - e_2 = \frac{2\,n \pm 1}{4}\,\lambda,$$

dann wird aus:

$$\sin\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(e_1 - e_2) = \sin\frac{2\,\pi\,(2\,n \pm 1)\,.\,\lambda}{\lambda\,.\,4} =$$

$$= \sin\frac{2\,n \pm 1}{2}\,\pi = \pm\,1,$$

$$\text{und } \cos\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(e_1 - e_2) = \cos\frac{2\,n \pm 1}{2}\,\pi = 0.$$

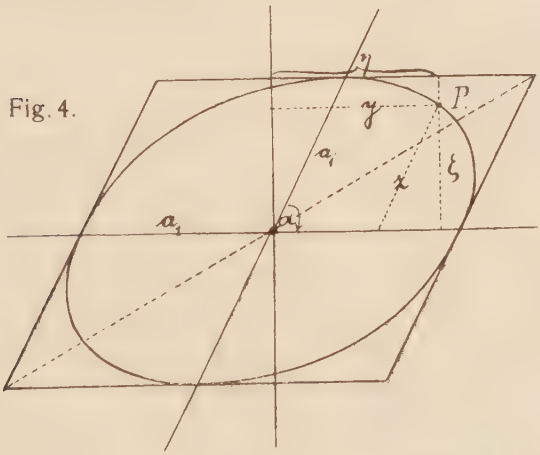
Diese Werte in Gleichung (9.) eingesetzt, ergeben:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 = 1. \quad \text{[Gleichung einer Ellipse]}$$

In dem um M konzentrischen Halbkreise MC' ist $\alpha = 90°$; in ihm treten 14 Zirkularschwingungen auf, wenn $a_2 = a_1$ ist. In diesem Falle beschreiben alle Moleküle auf den Kurven D' ebenfalls Kreisbahnen. Alle anderen Bahnen sind elliptisch.

Damit die Bahnkurven kreisförmig werden, sind verschiedene Bedingungen zu erfüllen. Wir verwandeln die schiefwinkligen Koordinaten y und z in rechtwinklige [Fig. 4.] und setzen:

Fig. 4.



$$y = \eta_1 - \zeta \cdot \cot \alpha, \quad z = \zeta : \sin \alpha$$

Durch Substitution wird die (y, z) Bahngleichung:

$$\left(\frac{\eta_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 \cdot \cot^2 \alpha - 2\frac{\eta_1 \cdot \zeta}{a_1^2} \cot \alpha$$
$$+ \left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2 : \sin^2 \alpha - \frac{2\,\eta_1\,\zeta}{a_1\,a_2} \cdot \frac{\cos 2\pi}{\sin \alpha} \left(\frac{e_1 - e_2}{\lambda}\right)$$
$$+ \frac{2\,\zeta^2}{a_1 \cdot a} \cdot \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Damit nun diese Gleichung eine Kreisgleichung werde:

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 = \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

müssten folgende zwei Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$\frac{\cot^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2 \cdot \sin^2 \alpha} + \frac{2 \cot \alpha}{a_1 \cdot a_2 \sin \alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \frac{1}{a_1^2},$$

und $$\frac{\cot \alpha}{a_1^2} + \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \sin \alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = 0.$$

Daraus folgt:

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot^2 \alpha = 1, \text{ und } [a_2 = a_1]:$$

$$\cos \alpha = -\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}, \text{ und hieraus:}$$

$$e_1 - e_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \{(2n + 1)\pi - \alpha\};$$

oder da der Abstand der beiden Zentren [d]:

$$d^2 = e_1^2 + e_2^2 - 2 e_1 \cdot e_2 \cdot \cos \alpha \text{ ist:}$$

$$\cos \alpha = \frac{e_1^2 + e_2^2 - d^2}{2 e_1 \cdot e_2}$$

$$1 - \frac{e_1^2 + e_2^2 - d^2}{2 e_1 \cdot e_2} = 1 - \cos \alpha = 1 + \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

$$\frac{d^2 - (e_1 - e_2)^2}{2 e_1 \cdot e_2} = 1 + \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = 2 \cos^2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Diese Kurven (*D'*) sind also **transcendent.**

Der Radius dieser Kreisbahnen ist:

$$r = a_1 \cdot \sin 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = a_1 \cdot \sin \alpha.$$

Er wird ein Maximum (a_1) für $\alpha = 90^0$, demnach für den Halbkreis über CC'; er wird Null für $\alpha = 180^0$ [also in der Zentrale] und für $\alpha = 0^0$ [für unendlich entfernte Punkte].

Um die Punkte für die Zentrale zu finden, von denen die transcendenten Kurven (D') auslaufen, setzen wir $\alpha = 180^0 = \pi$, woraus:

$$e_1 - e_2 = n. \lambda,$$

folgt. Solche Punkte sind B, B . . . . . [Taf. III]. Von diesen laufen je zwei Kurven D' und zwar **asymptotisch** zu den benachbarten Kurven $A\,A'$ aus.

Es ist nämlich $sin\ \alpha = 0^0$, also:

$$e_1 - e_2 = \frac{2n + 1}{2} \lambda . \quad \text{(Hyperbeln.)}.$$

Die Ausgangspunkte der D'-Kurven liegen von C bezw. C' um $\frac{2n + 1}{4} \lambda$ ab.

Hörbarkeit und Geschwindigkeit in den Interferenz-Wellenstrahlen.

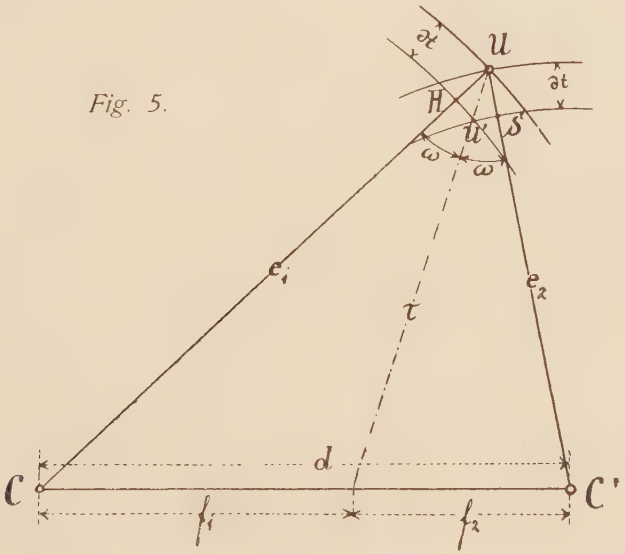
Man ersieht aus Taf. III, dass sowohl longitudinale, als auch transversale Schwingungen auf den stehenden Hyperbeln auftreten, absolute Inferferenzlinien, wie sie bei Transversalwellen vorkommen, dagegen nicht. Die longitudinalschwingenden Schallstrahlen, welche in unserem Falle in Abständen von $\frac{2n+1}{4}\lambda$ von den Erregungszentren liegen, sind hörbar, die transversalschwingenden Schallstrahlen, welche in Abständen von $\frac{n}{2}\lambda$ liegen, hingegen nicht.

Es ist nun weiter von Interesse, die Geschwindigkeit zu bestimmen, mit welcher die Interferenzwellen auf diesen Bahnen fortschreiten.

Betrachten wir die Wellen mit longitudinalen Schwingungen auf den Hyperbeln BB', welche in der Mitte zwischen zwei hyperbolischen Interferenzkurven liegen. Sie schreiten auf den wandernden Ellipsen fort. Sie wandern mit einer gewissen Geschwindigkeit, die für die verschiedenen Ellipsen verschieden ist, und desto kleiner wird, je weiter sie sich von der Achse entfernen.

Die Geschwindigkeit der primären Wellen ist wieder gleich c und es sei die Geschwindigkeit für irgend einen Punkt der Interferenzwellen v. Die Richtung der Fortbewegung wird nun bestimmt durch die Tangente der Bahn. Es mag die Länge der Tangente irgend eines Punktes $[U]\tau$ sein, also das Stück zwischen dem betr. Punkte und der Achse. [Vergl. die Fig. 5.]

Fig. 5.



Dann ist für die Zeit ∂t:

$$U H = U S = c.\ \partial t$$

und $$U U' = v.\ \partial t.$$

Aus

$$U U'.\ \cos\omega = c.\ \partial t \text{ folgt dann:}$$

(10.) $$v = c : \cos\omega,$$

wo ω der Winkel der Tangente mit den Leitstrahlen bezeichnet. Aus der Fig. 5 folgt:

(11.) $$f_1 = d\,\frac{e_1}{e_1 + e_2} \text{ und } f_2 = d\,\frac{e_2}{e_1 + e_2},$$

somit

(12.) $$\frac{f_1}{f_2} = \frac{e_1}{e_2}$$

Ferner ist:

(13.) $$f_1^2 = e_1^2 + \tau^2 - 2\,e_1\,\tau \cdot \cos\omega$$

(14.) $$f_2^2 = e_2^2 + \tau^2 - 2\,e_2\,\tau \cdot \cos\omega$$

Aus den Gleichungen (13) und (14) lässt sich zunächst bestimmen:

$$\cos\omega = \frac{e_1^2 + \tau^2 - f_1^2}{2\,e_1 \cdot \tau} = \frac{e_2^2 + \tau^2 - f_2^2}{2\,e_2 \cdot \tau}$$

oder

$$\tau^2\,(e_2 - e_1) = e_1 \cdot e_2^2 - e_1^2 \cdot e_2 + e_2\,f_1^2 - e_1\,f_1^2$$

$$\tau^2 = e_1 \cdot e_2 + \frac{e_2 \cdot f_1^2 - e_1 \cdot f_2^2}{e_2 - e_1}.$$

Für f_1 und f_2 substituiert man die Werte der Gleichungen (11), dann wird:

$$\tau^2 = e_1 \cdot e_2 + \frac{e_2\,\frac{d^2 \cdot e_1^2}{(e_1 + e_2)^2} - e_1\,\frac{d^2 \cdot e_2^2}{(e_1 + e_2)^2}}{e_2 - e_1}$$

$$= \frac{e_1 \cdot e_2\,[(e_2 - e_1)\,(e_1 + e_2)^2 + d^2\,(e_1 - e_2)]}{(e_2 - e_1)\,(e_1 + e_2)^2}$$

(15.) $$\tau^2 = e_1 \cdot e_2\,\frac{(e_1 + e_2)^2 - d^2}{(e_1 + e_2)^2} = e_1 \cdot e_2\left(1 - \frac{d^2}{(e_1 + e_2)^2}\right)$$

Zur Ermittelung von *cos* ω bildet man nunmehr den Quotienten der Gleichungen (13) und (14) und erhält nach Ersetzung von f_1 und f_2 nach Gleichung (12.):

$$\frac{e_1^2 + \tau^2 - 2\,e_1 \cdot \tau\cos\omega}{e_2^2 + \tau^2 - 2\,e_2 \cdot \tau\cos\omega} = \frac{e_1^2}{e_2^2}$$

$$2\,e_1 \cdot e_2\cos\omega\,(e_1 - e_2) = \tau\,(e_1^2 - e_2^2)$$

oder:

$$\cos\omega = \frac{e_1 + e_2}{2\, e_1 \cdot e_2} \cdot \tau \tag{16.}$$

Die Werte für τ^2 und $\cos\omega$ der Gleichungen (15.) und (16.) setzt man schliesslich in die Gleichung (10.) ein und erhält nach deren Quadrierung:

$$v^2 = \frac{c^2}{\cos^2\omega} - \frac{4\,c^2 \cdot e_1^2 \cdot e_2^2}{\tau^2 (e_1 + e_2)^2} -$$

$$- \frac{4\,c^2 \cdot e_1^2 \cdot e_2^2 (e_1 + e_2)^2}{e_1 \cdot e_2 (e_1 + e_2)^2 [(e_1 + e_2)^2 - d^2]}$$

oder

$$v = \frac{c}{\cos\omega} - \frac{2\,c \cdot e_1 \cdot e_2}{\tau (e_1 - e_2)} = 2c \sqrt{\frac{e_1 \cdot e_2}{(e_1 - e_2)^2 - d^2}} \cdot \tag{17.}$$

Dieser Wert für v ist mithin die Geschwindigkeit irgend eines Punktes der untersuchten Interferenzwellen.

In dem speziellen Falle, wo diese Hyperbeln die Achse schneiden, wird:

$\omega = 90°$, $\cos\omega = 0$, $\tau = 0$ und $e_1 + e_2 = d = 0$.

Wenn man dies in die Werte der Gleichung (17.) einsetzt, so erhält man das bemerkenswerte Resultat:

$$v = \infty .$$

Die Geschwindigkeit ist also in dem Moment, wo diese Welle aus der Achse austritt, unendlich gross.* Man könnte jetzt die Frage aufwerfen, wie wird nun die Geschwindigkeit jener Wellen in unendlicher Entfernung, also lim v, sein?

*) Vergl. Matthiessen: Vorlesungen über: »Theorie der Interferenzen«. 1902 03.

In diesem Falle wäre e_1 und e_2 unendlich gross und da e_1 nur um ein endliches Stück grösser als e_2 ist, würde also:

$$e_1 = e_2 = \tau$$

sein. Aus dem Wert von v in Gleichung (17) wird dann:

$$v = \frac{2\,c \,.\, e_1 \,.\, e_2}{\tau\,(e_1 + e_2)} = c\,.$$

Wir ersehen hieraus, dass diese Interferenzwellen in der unendlichen Entfernung wieder die Geschwindigkeit der Elementarwellen annehmen.

Auf allgemeines Interesse darf endlich noch die Erörterung der Frage rechnen: Bleibt der Ton in allen Punkten dieser Bahnen konstant?

Wir hatten die Länge der Primärwellen mit λ bezeichnet und wollen die Länge der Interferenzwellen L nennen, dann ist auch:

$$\frac{\lambda}{L} = \cos\omega \quad \text{oder} \quad L = \lambda : \cos\omega\,.$$

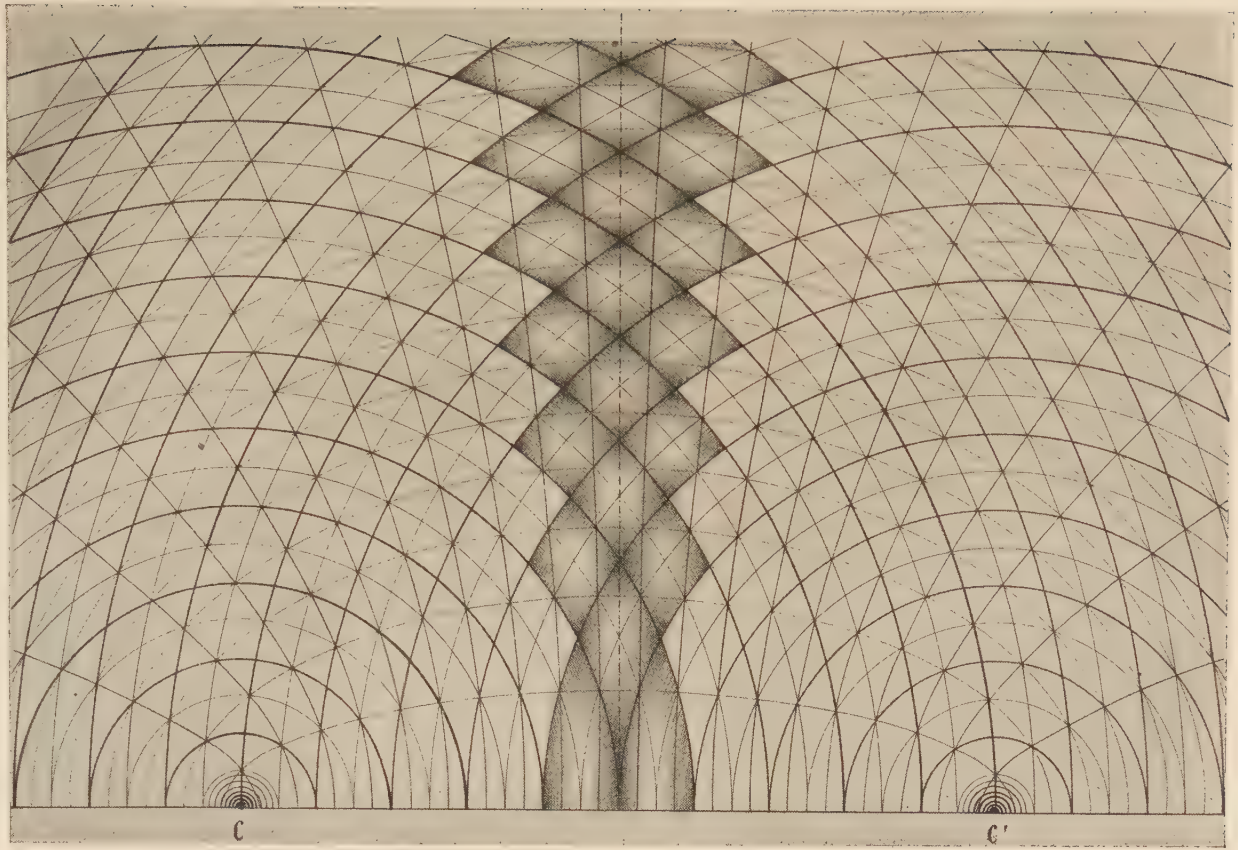
Somit ist:

$$\frac{v}{L} = \frac{c}{\lambda} = \frac{n\lambda}{\lambda} = n\,.$$

Der Ton ist mithin unabhängig von Ort und Zeit, d. h. die Höhe desselben bleibt an allen Punkten dieser Bahnen **unverändert**.

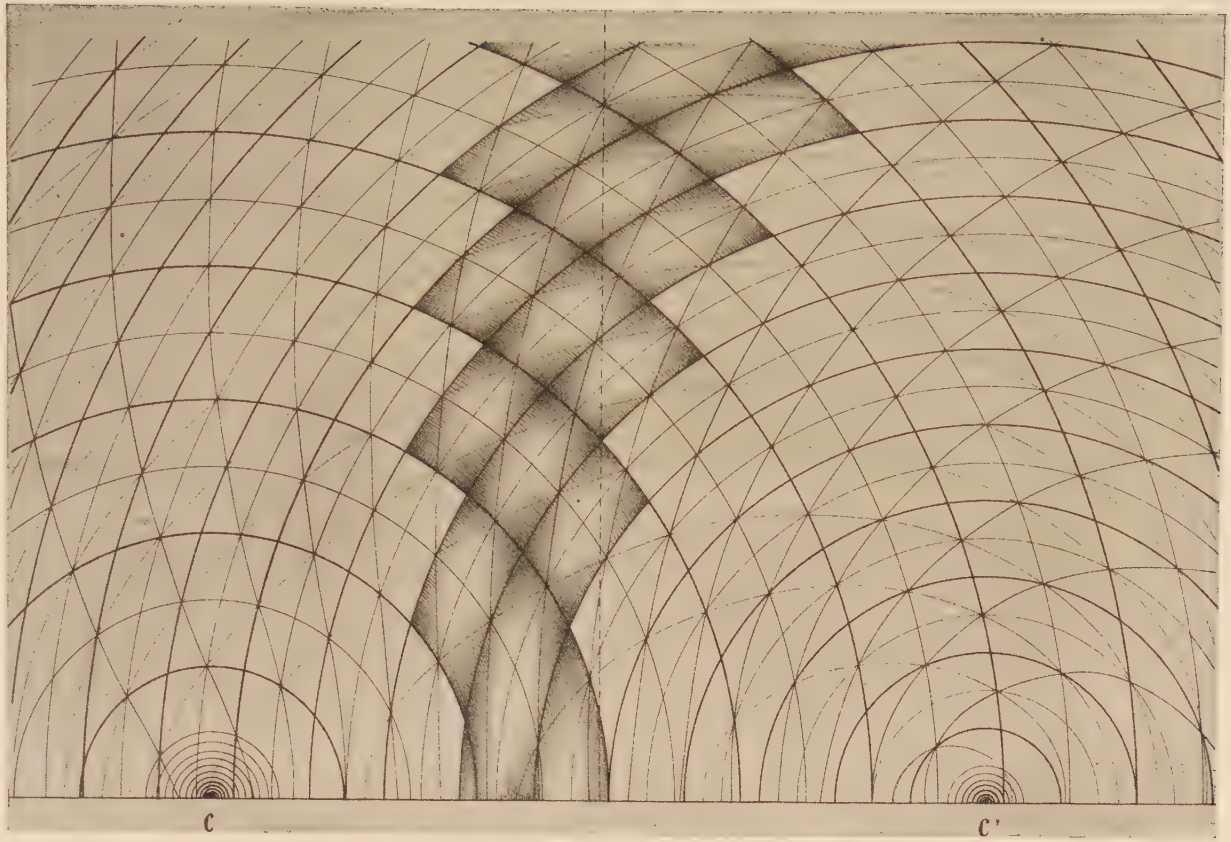
Die vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung des Herrn Professor Dr. phil. et med. L. Matthiessen, Direktor des physikalischen Instituts an der Universität Rostock, ausgeführt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, diesem meinem hochverehrten Lehrer meinen verbindlichsten Dank für die freundliche Unterstützung bei der Bearbeitung meiner Aufgabe auszusprechen.



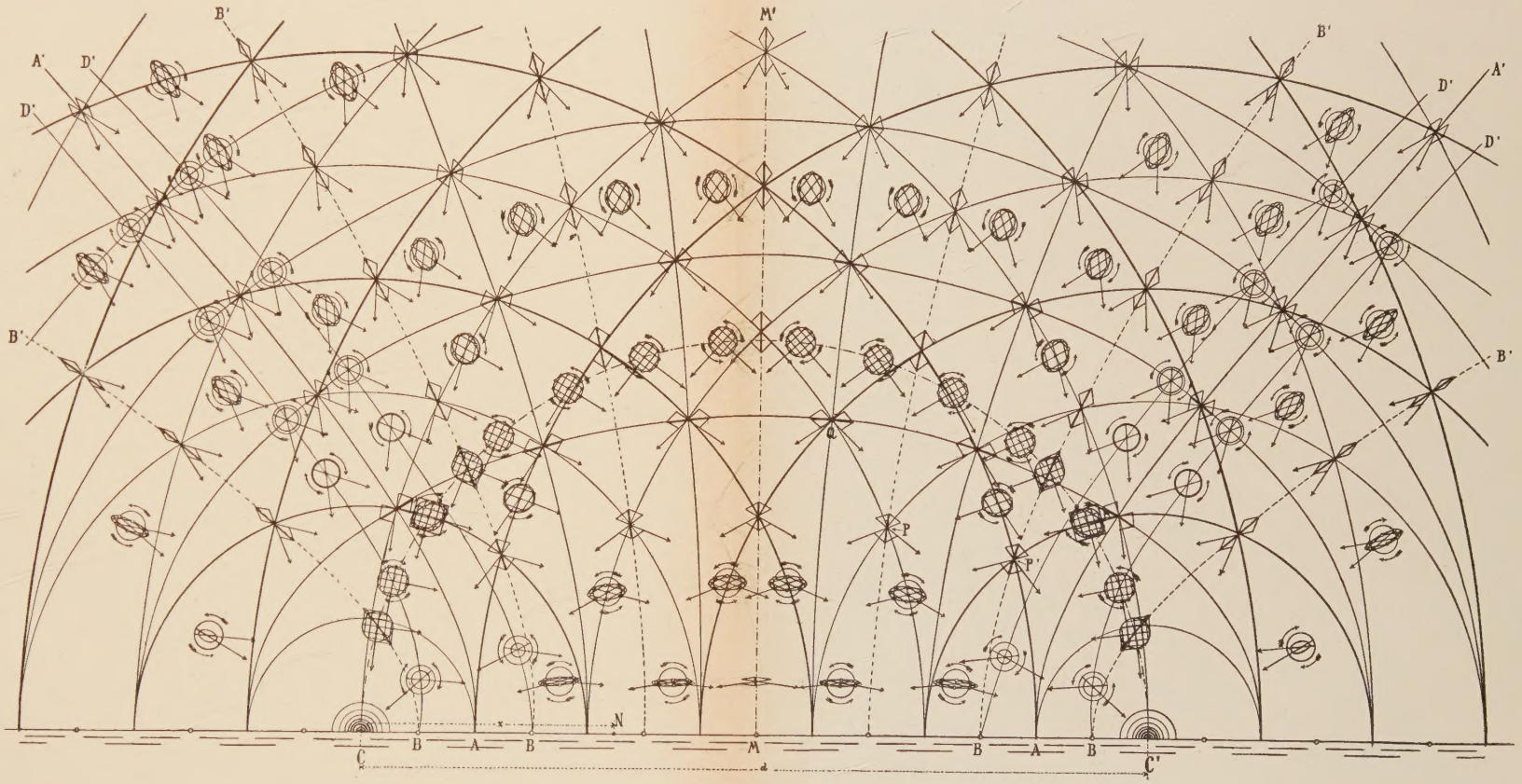
H. Schwarz.

H. Winterberg's Buchdruckerei



H. Schwarz.

H. Winterberg's Buchdruckerei



H. Schwarz.

H. Winterberg's Buchdruckerei